Université Sidi Mohamed Ben Abdellah **2015-2016**
ENSA- FES **Pr. Zhani**

Série N° 2 d'Analyse 1

(CP 1)

Exercice 1: 1) Démontrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $P_n : 2^n > n^2$

a) Montrer que $\forall n \geq 3$, on a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

b) Pour quelles valeurs de n , la propriétée P_n est vraie ?

Exercice 2: Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$; $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$; $f_3 : [0,1] \to [0,2]$, $x \to x^2$

2) $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,m) \to nm$; $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \to (n,(n+1)^2)$

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \to x + \sqrt{x^2+1}$

f est-elle bijective ? Si oui trouver sa réciproque.

Exercice 4:

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$, une application .

Soient A , B deux parties de F et C et D deux parties de E. Démontrer que:

1) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3) $C \subset D \Rightarrow f(C) \subset f(D)$.

4) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5: Soit $f : E \to F$ une application.

Montrer que f est injective $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout A et $B \subset E$.

Exercice 6: Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Démontrer que :

1) $\forall A \in P(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2) $\forall B \in P(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

3) Est-ce qu'on a l'égalité en général ?

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah **2015-2016**
ENSA- FES **Pr. Zhani**

Série N° 2 d'Analyse 1

(CP 1)

Exercice 1: 1) Démontrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $P_n : 2^n > n^2$

a) Montrer que $\forall n \geq 3$, on a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

b) Pour quelles valeurs de n , la propriétée P_n est vraie ?

Exercice 2: Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$; $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$; $f_3 : [0,1] \to [0,2]$, $x \to x^2$

2) $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,m) \to nm$; $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \to (n,(n+1)^2)$

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \to x + \sqrt{x^2+1}$

f est-elle bijective ? Si oui trouver sa réciproque.

Exercice 4:

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$, une application .

Soient A , B deux parties de F et C et D deux parties de E. Démontrer que:

1) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3) $C \subset D \Rightarrow f(C) \subset f(D)$.

4) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5: Soit $f : E \to F$ une application.

Montrer que f est injective $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout A et $B \subset E$.

Exercice 6: Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Démontrer que :

1) $\forall A \in P(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2) $\forall B \in P(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

3) Est-ce qu'on a l'égalité en général ?

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
ENSA FES

2015-2016
Pr. Zhani

Série N° 4 d'Analyse 1 (CP 1)

Exercice 1 :

1) Trouver les limites des suites suivantes:

$$x_n = \frac{n + \cos n}{n - \sin n} \quad ; \quad y_n = \sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + n}$$

et $u_n = \dfrac{a^n - n}{b^n + n}$ où $a > 1$ et $b > 1$.

2) Etudier les suites : $v_n = e^{n(-1)^n}$ et $w_n = (-1)^n e^{-n}$

Exercice 2 : Trouver les limites des suites suivantes:

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$ où $x \in \mathbb{R}$.

2) $v_n = \dfrac{3n^2 + \cos(n)}{4(n+1)^2 + \sin(3n)}$ **3)** $w_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$

Exercice 3 : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est une suite stationnaire.

Exercice 4: Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

Soit $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

1°) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

2°) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3°) Soit $E = \{u_n / n \in \mathbb{N}^*\}$. Trouver $\inf(E)$ et $\sup(E)$.

Exercice 5 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par:

u_0 et v_0 sont tel que $0 < v_0 < u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n}$$

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n < u_n$

b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 6 : Etudier les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$u_0 = 4$ et $v_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{5 + 4u_n}{3 + u_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3}{1 + v_n^2}$$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah **2015-2016**
ENSA- FES **Pr. Zhani**

Série N° 5 d'Analyse 1 (CP 1)

Exercice 1 :

1) Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{27}{7}\pi\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{19}{6}\pi\right)\right)$

2) Soit $f\ (x) = \arccos\left(\sqrt{x^2-2}\right)$ .Déterminer les domaines de f et de f'

Exercice 2 : Montrer que :

1) $\forall\ x \in [1, +\infty[\ :\ \arg ch\ (x) = \frac{1}{2}\ \ln\left(\dfrac{x\ +\ \sqrt{x^2\ -\ 1}}{x\ -\ \sqrt{x^2\ -\ 1}}\right)$.

2) $\forall\ x \in [-1, 1]\ :\ \sin\left(\arccos\left(x\right)\right)\ =\ \sqrt{1\ -\ x^2}$

3) $\forall\ x \in [0, \pi]\ :\ 2\ \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1\ +\ \cos x}{2}}\right) = x$

Exercice 3 : Soit $f\ (x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1\ -\ x^2}}{x}\right)\ -\ \arccos\left(2x^2\ -\ 1\right)$.

1°) Montrer que $]\ 0\ ,\ 1\ ] \subset D_f$.

2°) Calculer $f\ '(x)$ pour tout $x \in]\ 0\ ,\ 1\ [$ et en déduire une expression simple de $f\ (x)$ pour $x \in]\ 0\ ,\ 1\ ]$.

3°) Retrouver ce résultat en posant $t = \arccos x$, avec $x \in]\ 0\ ,\ 1\ ]$.

Exercice 4: Soit $f\ (x) =\ x\ -\ \cos\left(x\right)$

1°) Montrer qu'il existe $x_0 \in \left]\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f\ (x_0) = 0$.

2°) En déduire qu'il existe $c \in \left]x_0\ ,\ \frac{\pi}{6}\right[$ tel que $\dfrac{\pi\ -\ 2\sqrt{2}}{\pi\ -\ 4\ x_0}\ =\ f\ '(c)$.

Exercice 5 :

1) En appliquant T.A.F. à la fonction $\ln(x)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $\lim\limits_{n\ \longrightarrow\ +\infty}\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$

2) Montrer que $\forall\ x > 0\quad \dfrac{x}{1\ +\ x^2}\ <\ \arctan\left(x\right)\ <\ x$

Exercice 6 : En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\ \longrightarrow\ 0}\ \dfrac{a^x\ -\ b^x}{c^x\ -\ d^x}$ où $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ et $c \neq d$

2) $\lim\limits_{x\ \longrightarrow\ 0}\ \dfrac{x\ -\ \sin\left(x\right)}{x\ \sin\left(x\right)}$ **3)** $\lim\limits_{x\ \longrightarrow\ 4}\ \dfrac{\sqrt{2x+1}\ -\ 3}{\sqrt{x-2}\ -\ \sqrt{2}}$

Université sidi Mohamed Ben Abdellah
ENSA-FES

Pr.EL-Kettani & Pr.Zhani
2015-16

Contrôle d'Analyse 1 (CP1)
(Durée 1h30)

Exercice 1:

1) Déterminer parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies:
   a) $\exists\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ :\ x+y>0.$
   b) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ :\ x+y>0.$
   c) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ :\ x+y>0.$
2) Donner la négation de chacune des assertions suivantes:
   a) La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est croissante et positive.
   b) il existe $x \geq 0$ tel que $f(x) \leq 0.$
   c) il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y).$

Exercice 2 :

1) Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C}:\ \ z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |\,z\,|$
2) Montrer que $\forall\, (z,z') \in \mathbb{C}^2$:
   $|\,z+z'\,| = |\,z\,| + |\,z'\,| \ \Leftrightarrow\ z'\bar{z} \in \mathbb{R}^+$
3) Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C}$:
   $$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) > 0.$$

Exercice 3: Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$n \to \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x\ ,\ y) \to (x+y\ ,\ x-y)$$

Exercice 4: Soit $f:E\to F$ une application. Montrer que:

1) f est injective $\Leftrightarrow\ \forall\, A \in P(E)\ ,\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A.$
2) f est surjective $\Leftrightarrow\ \forall\, B \in P(F)\ ,\ f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B\ .$

Université sidi Mohamed Ben Abdellah Pr.EL-Kettani & Pr.Zhani
ENSA-FES 2015-16

Examen d'Analyse 1 (CP1)
(Durée 2 H)

Exercice 1 :

Pour $x \in]0\ ,\ \pi[$ on pose $f\ (x) = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1\ -\ \cos\ x}{2}}\right) + \dfrac{x}{2}$

1) Vérifier que f est bien définie sur $]0\ .\ \pi[$.
2) Calculer $f\,'(x)$ pour tout $x \in]0\ ,\ \pi[$.
3) En déduire une expression simple de $f\ (x)$ pour $x \in]0\ ,\ \pi[$.
4°) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\arccos(\sin\ x) = \tfrac{\pi}{2}\ -\ x$$

5) Retrouver le résultat de **3)** en utilisant la question **4°)**.

Exercice 2 : Soient $I = [e\ .\ +\infty[$ et f définie sur I par $f\ (x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

1°) Montrer que f est strictement croissante sur I.
2°) Trouver les solutions de l'équation $f\ (x) = x$ sur I.
3°) Montrer que $\forall\ x \in I,\ \frac{1}{4}\ -\ f\,'(x) \geq 0$.
4°) On pose $u_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n\,+\,1} = f\ (u_n)$.

a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n > e$.

b) En utilisant le T.A.F, montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}\ -\ e| \leq \dfrac{1}{4}\ |u_n\ -\ e|$.

c) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n\ -\ e| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\ |u_0\ -\ e|$ et donner la limite de (u_n).

d) Montrer par une autre méthode que (u_n) est convergente.

Exercice 3 : Calculer : $\lim\limits_{x\ \longrightarrow\ 0} \dfrac{(1 - e^x)\,(1 - \cos x)}{x^3\ +\ x^4}$

Exercice 4:
Soient E et F deux ensembles et $f\ :\ E \rightarrow\ F$, une application .
Soient A , B deux parties de F et C et D deux parties de E.
1) Comparer $f\ (C \cup D)$ et $f\ (C) \cup\ f\ (D)$.
2) Comparer $f^{-1}\ (A \cup B)$ et $f^{-1}\ (A) \cup\ f^{-1}\ (B)$.
3) Comparer $f^{-1}\ (A^c)$ et $\left(\ f^{-1}\ (A)\right)^c$ où A^c est le complémentaire de A.

Exercice 5 : Trouver les bornes sup et inf de l'ensemble :

$$A = \left\{\ \frac{1}{n^2\ -\ 4n}\ /\ \ n \geq 5\ \right\}$$

Contrôle d'Analyse I

Samedi 29 Novembre 2014, Durée 1h30

Exercice 1 Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}_+^*$.

On définit l'ensemble $A^{-1} = \{\frac{1}{a} \mid a \in A\}$

1 Montrer que $\inf A^{-1}$ existe et que $\inf A^{-1} = \frac{1}{\sup A}$

2 On considère l'ensemble $A = \{(-1)^n + \frac{1}{2n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

a. Montrer que A est bornée

b. Calculer sa borne supérieure et sa borne inférieure

Exercice 2 Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 \end{cases}$$

A) On pose $a = 1$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 1$

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite

B) On pose $a = -1$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq -n$

2. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exercice 3.

Etudier le prolongement par continuité de la fonction $f(x) = \sin^2(x) E(\frac{1}{x})$

Exercice 4. En utilisant une fonction équivalente, calculer les limites sui

1 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x) - \sin(2x)}{\tan^3(x)}$

2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \cos(\frac{1}{x})} \ln(1 + \frac{1}{x^2})$

Bon

Scanned by CamScanner

Contrôle (Analyse 3) (CP2)

Exercice 1 : Soient A et B deux parties non vide et bornées de $\mathbb{R}$

1) Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

2) Montrer que $\inf(A \cup B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup(A \cup B)$

3) Trouver $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et de $\sup B$

4) Trouver $\inf(A \cup B)$ en fonction de $\inf A$ et de $\inf B$.

5) Soit $E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, trouver $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 2 : Pour $x > 1$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right) - 2\, Argch\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) + Ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 1$

2) En déduire une expression simple de $f(x)$, pour $x > 1$.

3) Retrouver ce résultat en posant $t = Argch\, x$

Exercice 3 : Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+u_n}$

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente

2) Calculer sa limite

Exercice 4 : Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2^n}$

Pour $n \geq 2$ on pose $S_n = u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq 1$.

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ pour $n \geq 2$.

3) Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite

4) Montrer que $1 \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$

Scanned by CamScanner

ENSA - FES . 2013-2014

EXAMEN D'ANALYSE 1 (CP1)

(Durée : 1 H 30)

EXERCICE 1 : Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ avec $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ et $c \neq d$.

2) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + Ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$

EXERCICE 2 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x^3 + 6x}{2 + 3x^2}$ et on définit les suites (u_n) et (w_n) par $u_0 = 1$, $w_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

1) Trouver les solutions de l'équation $x = f(x)$.
2) Etudier la monotonie de $f(x)$.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et $w_n \geq \sqrt{2}$.
4) Montrer que (u_n) et (w_n) sont convergentes.
5) Trouver les limites de (u_n) et de (w_n)

EXERCICE 3: Soient $f(x) = e^{\sin x} - \cos x - x$ et $g(x) = Ln(\cos x)$

1) Donner le D.L de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
2) Donner le D.L. de $g(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
3) Donner le D.L de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4) En déduire : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x - x}{x^2 Ln(\cos x)} + \frac{2}{x^2}$

EXERCICE 4: Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ dérivable tel que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$ avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Montrer qu'il existe $c \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que :

$$f'(c) + 3f(c) = 0.$$

Scanned by CamScanner

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
ENSA- FES

2015-2016
Pr. Zhani

Série N° 1 d'Analyse 1
(CP 1)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire avec les quantificateurs les propositions suivantes :

1) f s'annule en un point.
2) f est la fonction nulle.
3) f est croissante.
4) f n'est pas strictement croissante.
5) L'équation $f(x) = x$ admet au moins 3 solutions.
6) L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solutions.

Exercice 2: Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies:

1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \text{ est pair})$ ou $(n \text{ est impair})$.
2) $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair})$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est impair})$.
3) La fonction sin n'est pas nulle.
4) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N} :\ m > n.$
5) $\exists\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ m > n.$
6) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin x = x$
7) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin x = x$

Exercice 3: Donner la négation de chacune des assertions suivantes:

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0 \ \Rightarrow\ x \geq 0.$
2) $\forall\, M > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \geq A,\ f(x) > M.$
3) $\forall\, x \in E,: (x > 0 \text{ et } x^2 < 5)$ ou $(x \leq -10)$.
4) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$

Exercice 4: Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie.

$\forall\, y \in [0, 1] \quad x \geq y \ \Rightarrow\ x \geq 2y$

Exercice 5: Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. Démontrer que D ne peut s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.